

2016 年全国高中数学联合竞赛加试 (A 卷)

参考答案及评分标准

说明:

1. 评阅试卷时, 请严格按照本评分标准的评分档次给分.
2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 10 分为一个档次, 不要增加其他中间档次.

一、(本题满分 40 分) 设实数 $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ 满足 $9a_i > 11a_{i+1}^2 (i = 1, 2, \dots, 2015)$.

求 $(a_1 - a_2^2) \cdot (a_2 - a_3^2) \cdots (a_{2015} - a_{2016}^2) \cdot (a_{2016} - a_1^2)$ 的最大值.

解 令 $P = (a_1 - a_2^2) \cdot (a_2 - a_3^2) \cdots (a_{2015} - a_{2016}^2) \cdot (a_{2016} - a_1^2)$.

由已知得, 对 $i = 1, 2, \dots, 2015$, 均有 $a_i - a_{i+1}^2 > \frac{11}{9} a_{i+1}^2 - a_{i+1}^2 \geq 0$.

若 $a_{2016} - a_1^2 \leq 0$, 则 $S \leq 0$10 分

以下考虑 $a_{2016} - a_1^2 > 0$ 的情况. 约定 $a_{2017} = a_1$. 由平均不等式得

$$\begin{aligned} P^{\frac{1}{2016}} &\leq \frac{1}{2016} \sum_{i=1}^{2016} (a_i - a_{i+1}^2) = \frac{1}{2016} \left(\sum_{i=1}^{2016} a_i - \sum_{i=1}^{2016} a_{i+1}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2016} \left(\sum_{i=1}^{2016} a_i - \sum_{i=1}^{2016} a_i^2 \right) = \frac{1}{2016} \sum_{i=1}^{2016} a_i(1 - a_i) \quad \text{.....20 分} \\ &\leq \frac{1}{2016} \sum_{i=1}^{2016} \left(\frac{a_i + (1 - a_i)}{2} \right)^2 = \frac{1}{2016} \cdot 2016 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

所以 $P \leq \frac{1}{4^{2016}}$30 分

当 $a_1 = a_2 = \dots = a_{2016} = \frac{1}{2}$ 时, 上述不等式等号成立, 且有 $9a_i > 11a_{i+1}^2$ ($i = 1, 2, \dots, 2015$), 此时 $P = \frac{1}{4^{2016}}$.

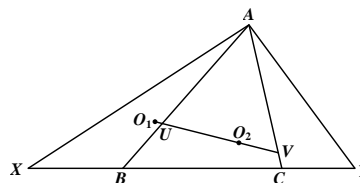
综上所述, 所求最大值为 $\frac{1}{4^{2016}}$40 分

二、(本题满分 40 分) 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, X, Y 是直线 BC 上两点 (X, B, C, Y 顺次排列), 使得

$$BX \cdot AC = CY \cdot AB.$$

设 $\triangle ACX$, $\triangle ABY$ 的外心分别为 O_1, O_2 , 直线 O_1O_2 与 AB, AC 分别交于点 U, V .

证明: $\triangle AUV$ 是等腰三角形.



证法一 作 $\angle BAC$ 的内角平分线交 BC 于点 P . 设三角形 ACX 和 ABY 的外接圆分别为 ω_1 和 ω_2 . 由内角平分线的性质知, $\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC}$. 由条件可得 $\frac{BX}{CY} = \frac{AB}{AC}$.

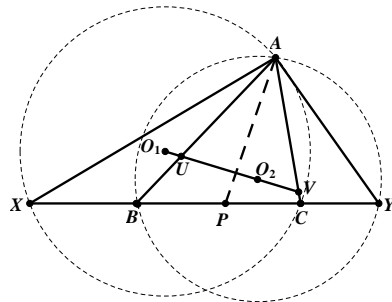
从而

$$\frac{PX}{PY} = \frac{BX + BP}{CY + CP} = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CP},$$

即 $CP \cdot PX = BP \cdot PY$20分

故 P 对圆 ω_1 和 ω_2 的幂相等, 所以 P 在 ω_1 和 ω_2 的根轴上.30分

于是 $AP \perp O_1O_2$, 这表明点 U, V 关于直线 AP 对称, 从而三角形 AUV 是等腰三角形.40分



证法二 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O , 连接 OO_1, OO_2 . 过点 O, O_1, O_2 分别作直线 BC 的垂线, 垂足分别为 D, D_1, D_2 . 作 $O_1K \perp OD$ 于点 K .

我们证明 $OO_1 = OO_2$. 在直角三角形 OKO_1 中,

$$OO_1 = \frac{O_1K}{\sin \angle O_1OK}.$$

由外心的性质, $OO_1 \perp AC$. 又 $OD \perp BC$, 故 $\angle O_1OK = \angle ACB$.

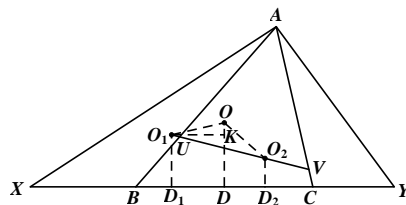
而 D, D_1 分别是 BC, CX 的中点, 所以 $DD_1 = CD_1 - CD = \frac{1}{2}CX - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BX$.

因此

$$OO_1 = \frac{O_1K}{\sin \angle O_1OK} = \frac{DD_1}{\sin \angle ACB} = \frac{\frac{1}{2}BX}{\frac{AB}{2R}} = R \cdot \frac{BX}{AB},$$

这里 R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径. 同理 $OO_2 = R \cdot \frac{CY}{AC}$10分

由已知条件可得 $\frac{BX}{AB} = \frac{CY}{AC}$, 故 $OO_1 = OO_2$20分



由于 $OO_1 \perp AC$, 所以 $\angle AVU = 90^\circ - \angle OO_1O_2$. 同理 $\angle AUV = 90^\circ - \angle OO_2O_1$.

.....30分

又因为 $OO_1 = OO_2$, 故 $\angle OO_1O_2 = \angle OO_2O_1$, 从而 $\angle AUV = \angle AVU$. 这样 $AU = AV$, 即 $\triangle AUV$ 是等腰三角形.40分

三、(本题满分 50 分) 给定空间中 10 个点, 其中任意四点不在一个平面上. 将某些点之间用线段相连, 若得到的图形中没有三角形也没有空间四边形, 试确定所连线段数目的最大值.

解 以这 10 个点为顶点, 所连线段为边, 得到一个 10 阶简单图 G . 我们证明 G 的边数不超过 15.

设 G 的顶点为 v_1, v_2, \dots, v_{10} , 共有 k 条边, 用 $\deg(v_i)$ 表示顶点 v_i 的度. 若 $\deg(v_i) \leq 3$ 对 $i=1, 2, \dots, 10$ 都成立, 则

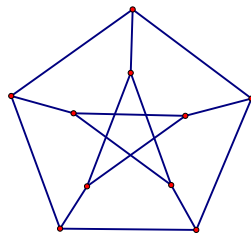
$$k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} \deg(v_i) \leq \frac{1}{2} \times 10 \times 3 = 15.$$

假设存在 v_i 满足 $\deg(v_i) \geq 4$. 不妨设 $\deg(v_1) = n \geq 4$, 且 v_1 与 v_2, \dots, v_{n+1} 均相邻. 于是 v_2, \dots, v_{n+1} 之间没有边, 否则就形成三角形. 所以, v_1, v_2, \dots, v_{n+1} 之间恰有 n 条边.10 分

对每个 j ($n+2 \leq j \leq 10$), v_j 至多与 v_2, v_3, \dots, v_{n+1} 中的一个顶点相邻 (否则设 v_j 与 v_s, v_t ($2 \leq s < t \leq n+1$) 相邻, 则 v_1, v_s, v_j, v_t 就对应了一个空间四边形的四个顶点, 这与题设条件矛盾.), 从而 v_2, \dots, v_{n+1} 与 v_{n+2}, \dots, v_{10} 之间的边数至多 $10 - (n+1) = 9 - n$ 条.20 分

在 v_{n+2}, \dots, v_n 这 $9 - n$ 个顶点之间, 由于没有三角形, 由托兰定理, 至多 $\left[\frac{(9-n)^2}{4} \right]$ 条边. 因此 G 的边数

$$k \leq n + (9 - n) + \left[\frac{(9 - n)^2}{4} \right] = 9 + \left[\frac{(9 - n)^2}{4} \right] \leq 9 + \left[\frac{25}{4} \right] = 15. \quad \text{.....30 分}$$



如图给出的图共有 15 条边, 且满足要求.

综上所述, 所求边数的最大值为 15.

.....50 分

四、(本题满分 50 分) 设 p 与 $p+2$ 均是素数, $p > 3$. 数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + \left\lceil \frac{pa_{n-1}}{n} \right\rceil$, $n = 2, 3, \dots$. 这里 $\lceil x \rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数.

证明: 对 $n = 3, 4, \dots, p-1$ 均有 $n \mid pa_{n-1} + 1$ 成立.

证明 首先注意, $\{a_n\}$ 是整数数列.

对 n 用数学归纳法. 当 $n = 3$ 时, 由条件知 $a_2 = 2 + p$, 故 $pa_2 + 1 = (p+1)^2$. 因 p 与 $p+2$ 均是素数, 且 $p > 3$, 故必须 $3 \mid p+1$. 因此 $3 \mid pa_2 + 1$, 即 $n = 3$ 时结论成立.

对 $3 < n \leq p-1$, 设对 $k = 3, \dots, n-1$ 成立 $k \mid pa_{k-1} + 1$, 此时 $\left\lceil \frac{pa_{k-1}}{k} \right\rceil = \frac{pa_{k-1} + 1}{k}$,

故
$$pa_{k-1} + 1 = p \left(a_{k-2} + \left\lceil \frac{pa_{k-2}}{k-1} \right\rceil \right) + 1 = p \left(a_{k-2} + \frac{pa_{k-2} + 1}{k-1} \right) + 1$$

$$= \frac{(pa_{k-2} + 1)(p + k - 1)}{k - 1}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

故对 $3 < n \leq p-1$, 有

$$pa_{n-1} + 1 = \frac{p+n-1}{n-1} (pa_{n-2} + 1) = \frac{p+n-1}{n-1} \cdot \frac{p+n-2}{n-2} (pa_{n-3} + 1)$$

$$= \dots = \frac{p+n-1}{n-1} \cdot \frac{p+n-2}{n-2} \dots \frac{p+3}{3} (pa_2 + 1), \quad \dots\dots\dots 20 \text{ 分}$$

因此
$$pa_{n-1} + 1 = \frac{2n(p+1)}{(p+n)(p+2)} C_{p+n}^n.$$

由此知 (注意 C_{p+n}^n 是整数)
$$n \mid (p+n)(p+2)(pa_{n-1} + 1). \quad \text{①}$$

$$\dots\dots\dots 40 \text{ 分}$$

因 $n < p$, p 素数, 故 $(n, n+p) = (n, p) = 1$, 又 $p+2$ 是大于 n 的素数, 故 $(n, p+2) = 1$, 从而 n 与 $(p+n)(p+2)$ 互素, 故由①知 $n \mid pa_{n-1} + 1$. 由数学归纳法知, 本题得证. $\dots\dots\dots 50 \text{ 分}$