

## 2015 年全国高中数学联合竞赛一试 (A 卷)

### 参考答案及评分标准

说明:

1. 评阅试卷时, 请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档; 其他各题的评阅, 请严格按照本评分标准的评分档次给分, 不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 解答题中第 9 小题 4 分为一个档次, 第 10、11 小题 5 分为一个档次, 不要增加其他中间档次.

一、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 设  $a, b$  为不相等的实数, 若二次函数  $f(x) = x^2 + ax + b$  满足  $f(a) = f(b)$ , 则  $f(2)$  的值为\_\_\_\_\_.

答案: 4.

解: 由已知条件及二次函数图像的轴对称性, 可得  $\frac{a+b}{2} = -\frac{a}{2}$ , 即  $2a + b = 0$ , 所以

$$f(2) = 4 + 2a + b = 4.$$

2. 若实数  $\alpha$  满足  $\cos \alpha = \tan \alpha$ , 则  $\frac{1}{\sin \alpha} + \cos^4 \alpha$  的值为\_\_\_\_\_.

答案: 2.

解: 由条件知,  $\cos^2 \alpha = \sin \alpha$ , 反复利用此结论, 并注意到  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ , 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha} + \cos^4 \alpha &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} + \sin^2 \alpha \\ &= (1 + \sin \alpha) + (1 - \cos^2 \alpha) = 2 + \sin \alpha - \cos^2 \alpha = 2. \end{aligned}$$

3. 已知复数数列  $\{z_n\}$  满足  $z_1 = 1, z_{n+1} = \overline{z_n} + 1 + ni$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 其中  $i$  为虚数单位,  $\overline{z_n}$  表示  $z_n$  的共轭复数, 则  $z_{2015}$  的值为\_\_\_\_\_.

答案:  $2015 + 1007i$ .

解: 由已知得, 对一切正整数  $n$ , 有

$$z_{n+2} = \overline{z_{n+1}} + 1 + (n+1)i = \overline{\overline{z_n} + 1 + ni} + 1 + (n+1)i = z_n + 2 + i,$$

于是  $z_{2015} = z_1 + 1007 \times (2 + i) = 2015 + 1007i$ .

4. 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 2, AD = 1$ , 边  $DC$  上 (包含点  $D, C$ ) 的动点  $P$  与  $CB$  延长线上 (包含点  $B$ ) 的动点  $Q$  满足  $|\overline{DP}| = |\overline{BQ}|$ , 则向量  $\overline{PA}$  与向量  $\overline{PQ}$  的数量积  $\overline{PA} \cdot \overline{PQ}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

答案:  $\frac{3}{4}$ .

解: 不妨设  $A(0, 0), B(2, 0), D(0, 1)$ . 设  $P$  的坐标为  $(t, 1)$  (其中  $0 \leq t \leq 2$ ), 则由

$|\overline{DP}| = |\overline{BQ}|$  得  $Q$  的坐标为  $(2, -t)$ , 故  $\overline{PA} = (-t, -1), \overline{PQ} = (2-t, -t-1)$ , 因此

$$\overline{PA} \cdot \overline{PQ} = (-t) \cdot (2-t) + (-1) \cdot (-t-1) = t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

当  $t = \frac{1}{2}$  时,  $(\overline{PA} \cdot \overline{PQ})_{\min} = \frac{3}{4}$ .

5. 在正方体中随机取 3 条棱, 它们两两异面的概率为\_\_\_\_\_.

答案:  $\frac{2}{55}$ .

解: 设正方体为  $ABCD - EFGH$ , 它共有 12 条棱, 从中任意取出 3 条棱的方法共有  $C_{12}^3 = 220$  种.

下面考虑使 3 条棱两两异面的取法数. 由于正方体的棱共确定 3 个互不平行的方向 (即  $AB$ 、 $AD$ 、 $AE$  的方向), 具有相同方向的 4 条棱两两共面, 因此取出的 3 条棱必属于 3 个不同的方向. 可先取定  $AB$  方向的棱, 这有 4 种取法. 不妨设取的棱就是  $AB$ , 则  $AD$  方向只能取棱  $EH$  或棱  $FG$ , 共 2 种可能. 当  $AD$  方向取棱是  $EH$  或  $FG$  时,  $AE$  方向取棱分别只能是  $CG$  或  $DH$ .

由上可知, 3 条棱两两异面的取法数为  $4 \times 2 = 8$ , 故所求概率为  $\frac{8}{220} = \frac{2}{55}$ .

6. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点集  $K = \{(x, y) \mid (|x| + |3y| - 6)(|3x| + |y| - 6) \leq 0\}$  所对应的平面区域的面积为\_\_\_\_\_.

答案: 24.

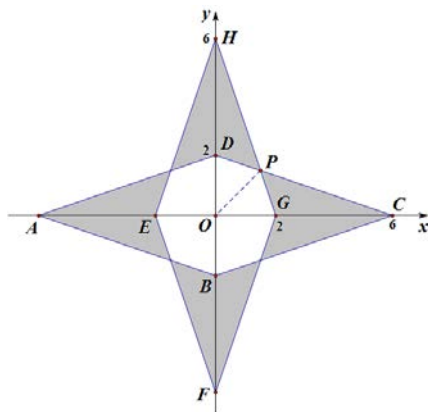
解: 设  $K_1 = \{(x, y) \mid |x| + |3y| - 6 \leq 0\}$ . 先考虑  $K_1$  在第一象限中的部分, 此时有  $x + 3y \leq 6$ , 故这些点对应于图中的  $\triangle OCD$  及其内部. 由对称性知,  $K_1$  对应的区域是图中以原点  $O$  为中心的菱形  $ABCD$  及其内部.

同理, 设  $K_2 = \{(x, y) \mid |3x| + |y| - 6 \leq 0\}$ , 则  $K_2$  对应的区域是图中以  $O$  为中心的菱形  $EFGH$  及其内部.

由点集  $K$  的定义知,  $K$  所对应的平面区域是被  $K_1$ 、 $K_2$  中恰好一个所覆盖的部分, 因此本题所要求的即为图中阴影区域的面积  $S$ .

由于直线  $CD$  的方程为  $x + 3y = 6$ , 直线  $GH$  的方程为  $3x + y = 6$ , 故它们的交点  $P$  的坐标为  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ . 由对称性知,

$$S = 8S_{\triangle CPG} = 8 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 24.$$



7. 设  $\omega$  为正实数, 若存在  $a, b (\pi \leq a < b \leq 2\pi)$ , 使得  $\sin \omega a + \sin \omega b = 2$ , 则  $\omega$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

答案:  $\omega \in \left[\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$ .

解: 由  $\sin \omega a + \sin \omega b = 2$  知,  $\sin \omega a = \sin \omega b = 1$ , 而  $[\omega a, \omega b] \subseteq [\omega\pi, 2\omega\pi]$ , 故题目条件等价于: 存在整数  $k, l (k < l)$ , 使得

$$\omega\pi \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 2l\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2\omega\pi. \quad \textcircled{1}$$

当  $\omega \geq 4$  时, 区间  $[\omega\pi, 2\omega\pi]$  的长度不小于  $4\pi$ , 故必存在  $k, l$  满足  $\textcircled{1}$  式.

当  $0 < \omega < 4$  时, 注意到  $[\omega\pi, 2\omega\pi] \subseteq (0, 8\pi)$ , 故仅需考虑如下几种情况:

- (i)  $\omega\pi \leq \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{2} \leq 2\omega\pi$ , 此时  $\omega \leq \frac{1}{2}$  且  $\omega \geq \frac{5}{4}$ , 无解;
- (ii)  $\omega\pi \leq \frac{5\pi}{2} < \frac{9\pi}{2} \leq 2\omega\pi$ , 此时有  $\frac{9}{4} \leq \omega \leq \frac{5}{2}$ ;
- (iii)  $\omega\pi \leq \frac{9\pi}{2} < \frac{13\pi}{2} \leq 2\omega\pi$ , 此时有  $\frac{13}{4} \leq \omega \leq \frac{9}{2}$ , 得  $\frac{13}{4} \leq \omega < 4$ .

综合 (i)、(ii)、(iii), 并注意到  $\omega \geq 4$  亦满足条件, 可知  $\omega \in \left[\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$ .

8. 对四位数  $\overline{abcd}$  ( $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9$ ), 若  $a > b, b < c, c > d$ , 则称  $\overline{abcd}$  为  $P$  类数; 若  $a < b, b > c, c < d$ , 则称  $\overline{abcd}$  为  $Q$  类数. 用  $N(P)$  与  $N(Q)$  分别表示  $P$  类数与  $Q$  类数的个数, 则  $N(P) - N(Q)$  的值为\_\_\_\_\_.

答案: 285.

解: 分别记  $P$  类数、 $Q$  类数的全体为  $A$ 、 $B$ , 再将个位数为零的  $P$  类数全体记为  $A_0$ , 个位数不等于零的  $P$  类数全体记为  $A_1$ .

对任一四位数  $\overline{abcd} \in A_1$ , 将其对应到四位数  $\overline{dcba}$ , 注意到  $a > b, b < c, c > d \geq 1$ , 故  $\overline{dcba} \in B$ . 反之, 每个  $\overline{dcba} \in B$  唯一对应于  $A_1$  中的元素  $\overline{abcd}$ . 这建立了  $A_1$  与  $B$  之间的一一对应, 因此有

$$N(P) - N(Q) = |A| - |B| = |A_0| + |A_1| - |B| = |A_0|.$$

下面计算  $|A_0|$ : 对任一四位数  $\overline{abc0} \in A_0$ ,  $b$  可取  $0, 1, \dots, 9$ , 对其中每个  $b$ , 由  $b < a \leq 9$  及  $b < c \leq 9$  知,  $a$  和  $c$  分别有  $9 - b$  种取法, 从而

$$|A_0| = \sum_{b=0}^9 (9-b)^2 = \sum_{k=1}^9 k^2 = \frac{9 \times 10 \times 19}{6} = 285.$$

因此,  $N(P) - N(Q) = 285$ .

二、解答题: 本大题共 3 小题, 满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 若实数  $a, b, c$  满足  $2^a + 4^b = 2^c, 4^a + 2^b = 4^c$ , 求  $c$  的最小值.

解: 将  $2^a, 2^b, 2^c$  分别记为  $x, y, z$ , 则  $x, y, z > 0$ .

由条件知,  $x + y^2 = z, x^2 + y = z^2$ , 故

$$z^2 - y = x^2 = (z - y^2)^2 = z^2 - 2y^2z + y^4. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

因此, 结合平均值不等式可得,

$$z = \frac{y^4 + y}{2y^2} = \frac{1}{4} \left( 2y^2 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \right) \geq \frac{1}{4} \cdot 3 \sqrt[3]{2y^2 \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{2}.$$

.....12分

当  $2y^2 = \frac{1}{y}$ , 即  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  时,  $z$  的最小值为  $\frac{3}{4} \sqrt[3]{2}$  (此时相应的  $x$  值为  $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ , 符合要求).

由于  $c = \log_2 z$ , 故  $c$  的最小值为  $\log_2 \left( \frac{3}{4} \sqrt[3]{2} \right) = \log_2 3 - \frac{5}{3}$ . .....16分

10. (本题满分 20 分) 设  $a_1, a_2, a_3, a_4$  是 4 个有理数, 使得

$$\{a_i a_j | 1 \leq i < j \leq 4\} = \left\{ -24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3 \right\},$$

求  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  的值.

**解:** 由条件可知,  $a_i a_j (1 \leq i < j \leq 4)$  是 6 个互不相同的数, 且其中没有两个为相反数, 由此知,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  的绝对值互不相等, 不妨设  $|a_1| < |a_2| < |a_3| < |a_4|$ , 则  $|a_i| |a_j| (1 \leq i < j \leq 4)$  中最小的与次小的两个数分别是  $|a_1| |a_2|$  及  $|a_1| |a_3|$ , 最大与次大的两个数分别是  $|a_3| |a_4|$  及  $|a_2| |a_4|$ , 从而必须有

$$\begin{cases} a_1 a_2 = -\frac{1}{8}, \\ a_1 a_3 = 1, \\ a_2 a_4 = 3, \\ a_3 a_4 = -24, \end{cases}$$

.....10分

于是  $a_2 = -\frac{1}{8a_1}, a_3 = \frac{1}{a_1}, a_4 = \frac{3}{a_2} = -24a_1$ . 故

$$\{a_2 a_3, a_1 a_4\} = \left\{ -\frac{1}{8a_1^2}, -24a_1^2 \right\} = \left\{ -2, -\frac{3}{2} \right\}, \quad \text{.....15分}$$

结合  $a_1 \in \mathbb{Q}$ , 只可能  $a_1 = \pm \frac{1}{4}$ .

由此易知  $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = 4, a_4 = -6$  或者  $a_1 = -\frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -4, a_4 = 6$ . 经检验知这两组解均满足问题的条件.

故  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \pm \frac{9}{4}$ . .....20分

11. (本题满分 20 分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  的左、右焦点. 设不经过焦点  $F_1$  的直线  $l$  与椭圆交于两个不同的点  $A, B$ , 焦点  $F_2$  到直线  $l$  的距离为  $d$ . 如果直线  $AF_1, l, BF_1$  的斜率依次成等差数列, 求  $d$  的取值范围.

解：由条件知，点  $F_1$ 、 $F_2$  的坐标分别为  $(-1, 0)$  和  $(1, 0)$ 。

设直线  $l$  的方程为  $y = kx + m$ ，点  $A$ 、 $B$  的坐标分别为  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ ，则  $x_1, x_2$  满足方程  $\frac{x^2}{2} + (kx + m)^2 = 1$ ，即

$$(2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + (2m^2 - 2) = 0. \quad ①$$

由于点  $A$ 、 $B$  不重合，且直线  $l$  的斜率存在，故  $x_1, x_2$  是方程①的两个不同实根，因此有①的判别式

$$\Delta = (4km)^2 - 4 \cdot (2k^2 + 1) \cdot (2m^2 - 2) = 8(2k^2 + 1 - m^2) > 0,$$

即 
$$2k^2 + 1 > m^2. \quad ②$$

由直线  $AF_1$ 、 $l$ 、 $BF_1$  的斜率  $\frac{y_1}{x_1 + 1}$ 、 $k$ 、 $\frac{y_2}{x_2 + 1}$  依次成等差数列知， $\frac{y_1}{x_1 + 1} + \frac{y_2}{x_2 + 1} = 2k$ ，

又  $y_1 = kx_1 + m$ ， $y_2 = kx_2 + m$ ，所以

$$(kx_1 + m)(x_2 + 1) + (kx_2 + m)(x_1 + 1) = 2k(x_1 + 1)(x_2 + 1).$$

化简并整理得， 
$$(m - k)(x_1 + x_2 + 2) = 0.$$

假如  $m = k$ ，则直线  $l$  的方程为  $y = kx + k$ ，即  $l$  经过点  $F_1(-1, 0)$ ，不符合条件。

因此必有  $x_1 + x_2 + 2 = 0$ ，故由方程①及韦达定理知， $\frac{4km}{2k^2 + 1} = -(x_1 + x_2) = 2$ ，即

$$m = k + \frac{1}{2k}. \quad ③$$

由②、③知， $2k^2 + 1 > m^2 = \left(k + \frac{1}{2k}\right)^2$ ，化简得  $k^2 > \frac{1}{4k^2}$ ，这等价于  $|k| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

反之，当  $m, k$  满足③及  $|k| > \frac{\sqrt{2}}{2}$  时， $l$  必不经过点  $F_1$ （否则将导致  $m = k$ ，与③矛盾），

而此时  $m, k$  满足②，故  $l$  与椭圆有两个不同的交点  $A$ 、 $B$ ，同时也保证了  $AF_1$ 、 $BF_1$  的斜率存在（否则  $x_1, x_2$  中的某一个为  $-1$ ，结合  $x_1 + x_2 + 2 = 0$  知  $x_1 = x_2 = -1$ ，与方程①有两个不同的实根矛盾）。  
.....10分

点  $F_2(1, 0)$  到直线  $l: y = kx + m$  的距离为

$$d = \frac{|k + m|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \cdot \left|2k + \frac{1}{2k}\right| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2} + 1}} \cdot \left(2 + \frac{1}{2k^2}\right). \quad \text{.....15分}$$

注意到  $|k| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，令  $t = \sqrt{\frac{1}{k^2} + 1}$ ，则  $t \in (1, \sqrt{3})$ ，上式可改写为

$$d = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{3}{t}\right). \quad ④$$

考虑到函数  $f(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{3}{t}\right)$  在  $[1, \sqrt{3}]$  上单调递减，故由④得， $f(\sqrt{3}) < d < f(1)$ ，即

$$d \in (\sqrt{3}, 2). \quad \text{.....20分}$$